Entrée en terminale option maths complémentaires

Les exercices qui suivent font appel à des notions essentielles du cours de 1ère qu'il est important de très bien maitriser en entrant en terminale. Il est conseillé de reprendre le cours avant de les traiter.
Ces exercices sont à faire pendant les vacances et seront contrôlés à la rentrée.

Pour avoir une meilleure connaissance de l'histoire des mathématiques, nous vous conseillons de lire :
« Le grand roman des maths » de Mickaël Launay.

Calcul numérique

Exercice 1

a) Calculer :

$A = 3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$ $\quad B = 2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$ $\quad C = \sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{1000}$

$D = \sqrt{7} \times \sqrt{56} \times \sqrt{40}$ $\quad E = (2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ $\quad F = \dfrac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{15}+3} + \dfrac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}-3}$

$G = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2-5\sqrt{3}\right)^2$

b) Ecrire sous forme d'une fraction irréductible

$A = \dfrac{3 - \dfrac{5}{7} + \dfrac{1}{2}}{3 + \dfrac{5}{7} - \dfrac{1}{2}}$ $\quad B = \dfrac{15^3 \times 8}{6^4 \times 5^3}$ $\quad C = \dfrac{7^2 \times 9^3 \times 4^3}{8^2 \times 21^3}$ $\quad D = 3^{-2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} \times \dfrac{1}{(-2)^{-2}}$

Pourcentages

Exercice 2 (questions indépendantes)

1) Le nombre d'élèves dans une école primaire est passé de 600 à 549.
Calculer le pourcentage de diminution.

2) Un article soldé à 20% coute 116 euros. Quel est le prix d'origine ?

3) Le prix d'un ordinateur était de 680 euros. Il subit deux baisses successives, la première de 20%, la seconde de 10%.

a) Quel est le prix de l'ordinateur après ces deux baisses ?

b) Quel est le pourcentage total de réduction ?

Equations-Inéquations

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou l'ensemble de définition à déterminer):

$(E_1) -\dfrac{7}{3}x = 0$ $\quad (E_2) 16x^2 - 9 + (2x+1)(3-4x) = 3(4x-3)^2$ $\quad (E_3) \dfrac{7x+2}{3x-1} = \dfrac{-2x+3}{2x+1}$

$(E_4) :\ 6x^2 - 7x - 3 = 0$ $\quad (E_5) :\ x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ $\quad (E_6) :\ \left(e^{x+1}\right)^2 = e^x$

$(I_1) : (3x-1)^2-(3x+5)^2<7$ $\quad (I_2)\ \dfrac{2}{x-4}-\dfrac{2x-4}{x^2-16}<-1$ $\quad (I_3) : -5x^2+x-4<0$

$(I_4) : e^{x^2-3x+5}-e<0$ $\quad (I_5) : \dfrac{2x-1}{3-2x}\leqslant\dfrac{2x+1}{x+2}$

Exercice 4

a) Développer $\left(8-3\sqrt{2}\right)^2$.

b) En déduire la résolution de l'équation (E) : $-x^2+\left(2+\sqrt{2}\right)x-13\sqrt{2}+19=0$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

a) $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ $\quad$ b) $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}$

Exercice 6

Déterminer les positions relatives de la droite d'équation $y=2x+1$ et de la parabole P d'équation $y=2x^2-9x+13$.

Systèmes

Exercice 7 Résoudre les systèmes suivants

$(S_1)\begin{cases}2x+3y=1\\5x-4y=-9\end{cases}$ $\quad (S_2)\begin{cases}15x-25y=55\\48x-6y=324\end{cases}$ $\quad (S_3)\begin{cases}5x-4y=7\\15x-12y=22\end{cases}$ $\quad (S_4)\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-1}{4}=2\\\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{y+3}{4}=0\end{cases}$

Fonctions

Exercice 8

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$. On ne cherchera pas à déterminer l'ensemble de définition de *f* et de *f'* et on présentera le résultat sous une forme permettant l'étude du signe de $f'(x)$.

$a)\ f(x)=2x+1+\dfrac{3}{x}$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+x+2}$ $\quad c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-3x}$

$e)\ f(x)=(4x-3)(1-3x)^5$ $\quad f)\ f(x)=\dfrac{e^x}{2x+1}$ $\quad g)\ f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^{2x+1}}$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^2-3x-1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer $f'(x)$, puis étudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}$.

2) Conjecturer, en justifiant, le nombre de solutions sur $[-3;3]$ de chacune des équations.

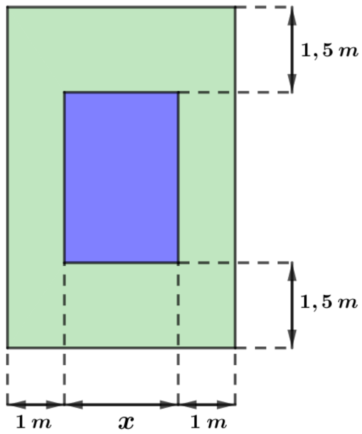
a. $f(x)=-4$ b. $f(x)=0$ c. $f(x)=\frac{5}{4}$

3) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-1).

Exercice 10

Un architecte doit construire une piscine rectangulaire entourée d'une clôture. La distance entre le bassin et la clôture doit être de 1 mètre dans la largeur et 1,5 mètre dans la longueur. La surface du terrain clôturé est égale à 54 m^2.

L'architecte souhaite maximiser la surface de la piscine. On note *x*, la largeur de la piscine.



1) Montrer que la surface de la piscine est égale à $x\left(\frac{54}{x+2}-3\right)$

2) Détermine la valeur de pour laquelle la surface de la piscine est maximale.
Quel est alors la surface de la piscine ?

Suites

Exercice 11

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2^n-4n$.

a) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

b) Etudier les variations de (u_n)

2) Déterminer la nature de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{e^{3n}}{2^{n+1}}$.

Exercice 12

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2-9n+4$.

Exercice 13

Calculer les sommes suivantes :

$S_1=38+41+...+173$ $S_2=8-4+2-1+...-\frac{1}{64}$

Exercice 14

Soit la suite (u_n) définie sur N par $u_0=-2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$.

1) Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y=\frac{1}{3}x+4$ et représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite. Quelles conjectures peut-on faire pour le sens de variation de (u_n) et sa limite ?

2) Soit la suite (v_n) définie sur N par $v_n=u_n-6$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de *n*.

3) Démontrer les conjectures émises à la question 1).

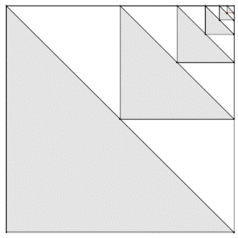
Exercice 15

Lors d'un cours de ski, Augustin apprend à prendre le téléski en snowboard.
La première fois, il parcourt 40 mètres avant de tomber du téléski. La deuxième fois, il parcourt 45 mètres.
Puis, à chaque tentative, il réussit à tenir sur la perche 5 mètres de plus que la fois précédente. Le téléski mesure 300 mètres de long.

1. Combien devra-t-il faire de tentatives pour arriver au sommet ?

2. Le téléski avance à la vitesse de 4 mètres par seconde. Combien de temps Augustin aura-t-il passé sur le téléski ?

Exercice 16



En considérant qu'il y a une infinité de triangles grisés, calculer l'aire totale des surfaces grisées.

Probabilités

Exercice 17

Deux urnes sont notées U_1 et U_2. Chacune contient cinq boules. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient une boule blanche et quatre boules noires.
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si le résultat du dé est 6, alors on tire une boule dans l'urne U_1, sinon on tire une boule dans l'urne U_2.
On gagne lorsque l'on obtient une boule blanche.
On note « S » le résultat du dé est 6, et « B » on tire une boule blanche.

1) Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes :
$p(S)$ $\quad p(\overline{S})$ $\quad p_S(B)$ $\quad p_{\overline{S}}(\overline{B})$

2) Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.

3) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\dfrac{7}{30}$.

4) Un joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne U_1 ?

5) Les événements B et S sont-ils indépendants ?

Exercice 18

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1) Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
M : ≪ Les deux boules sont de la même couleur ≫
N : ≪ Les deux boules sont de couleur différente ≫

2) On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.
   c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ? on rappellera que n correspond à un nombre de boules.
   d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ? Justifier.