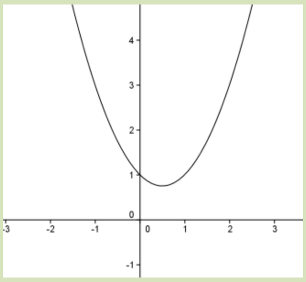
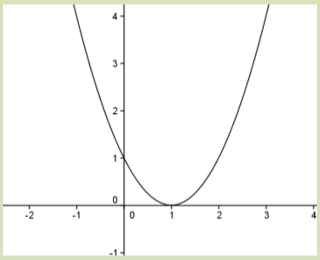
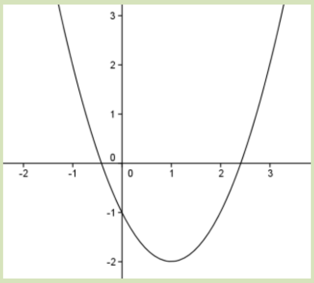
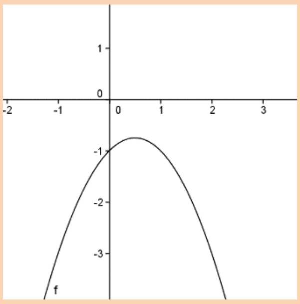
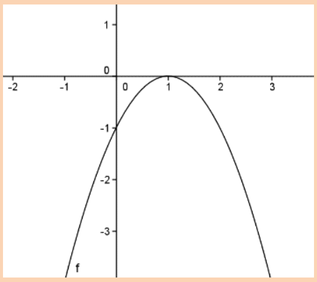
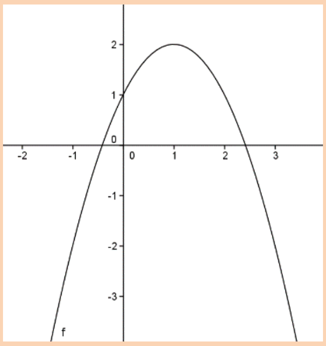
SECOND DEGRÉ

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solutions de $f(x) = 0$	$\varnothing$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation	Pas de factorisation	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$	$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
Signe du trinôme	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: Signe de a Le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$	x : $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ $f(x)$: Signe de a … 0 … Signe de a Le trinôme est du signe de a sauf pour $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	x : $-\infty$ … $x_{(1ou2)}$ … $x_{(1ou2)}$ … $+\infty$ $f(x)$: Signe de a … 0 … Signe de $-a$ … 0 … Signe de a Le trinôme est du signe : • de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ • de $(-a)$ sur $]x_1; x_2[$
Courbe $a > 0$		Courbe tangente à l'axe $(O;\vec{i})$ 	
Sens de variation $a > 0$	x : $-\infty$ … $-b/2a$ … $+\infty$ $f(x)$: ↘ $f(-b/2a)$ ↗		
$a < 0$		Courbe tangente à l'axe $(O;\vec{i})$ 	
Sens de variation $a < 0$	x : $-\infty$ … -b/2a … $+\infty$ $f(x)$: ↗ f(-b/2a) ↘		

On note $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Le **sommet** de la parabole est $S(\alpha;\beta)$; la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est **l'axe de symétrie** de la parabole.

Forme canonique : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$

Racines évidentes : Si $a+b+c=0$, les racines sont 1 et $\dfrac{c}{a}$. Si $a-b+c=0$, les racines sont -1 et $-\dfrac{c}{a}$.

SECOND DEGRÉ (Savoir-Faire)

Etude des variations d'une fonction trinôme.

Donner les variations de la fonction $f(x) = -4x^2 + 6x - 7$, ainsi que les coordonnées du sommet et l'axe de symétrie de C_f.

La fonction f est une **fonction polynôme** du second degré ou **trinôme**.

$$\frac{-6}{2\times(-4)} = \frac{3}{4} \qquad f\left(\frac{3}{4}\right) = -4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 6\times\frac{3}{4} - 7 = \frac{-9}{4} + \frac{18}{4} - \frac{28}{4} = \frac{-19}{4}$$

Comme le **coefficient** en x^2, la fonction f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.

C_f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{3}{4}$ et pour sommet le point $S\left(\frac{3}{4};\frac{-19}{4}\right)$

Forme canonique d'une fonction trinôme

Donner la forme canonique du trinôme $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3\left(x^2 - 2x\right) + 5$

$= 3\left((x-1)^2 - 1\right) + 5$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3(x-1)^2 + 2$

Autre méthode : $\frac{6}{2\times 3} = 1 \qquad f(1) = -2$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 3\left(x - (-1)\right)^2 + (-2)$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3(x+1)^2 - 2$

Stratégie à utiliser dans la recherche des racines et/ou la factorisation d'un trinôme.

$3x^2 - 6x = 0$ $\rightarrow$*La **factorisation** donne directement les racines du polynôme et les solutions de l'équation.*

$\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \qquad S = \{0;2\}$

$x^2 - 10x + 25 = 0$ $\rightarrow$*Les **identités remarquables** permettent de factoriser rapidement et donner les solutions.*

$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \qquad S = \{5\}$

$2x^2 + 9x + 7 = 0$ $\rightarrow$ *On utilise les **racines évidentes** (ici –1), ou la propriété avec la somme des coefficients*

Le polynôme $2x^2 + 9x + 7$ admet deux racines évidentes : -1 et $-7/2$ (car $a - b + c = 0$)

$\Leftrightarrow 2(x+1)\left(x + \frac{7}{2}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow (x+1)(2x+7) = 0 \qquad S = \left\{-1;-\frac{7}{2}\right\}$

$2x^2 + 4x - 3 = 0$ $\rightarrow$ *On utilise le **discriminant** pour rechercher les (éventuelles) racines.*

Soit Δ, le discriminant du polynôme $2x^2 + 4x - 3$: $\Delta = 4^2 - 4\times 2\times(-3) = 40 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$

Comme $\Delta > 0$, le **polynôme** admet deux **racines** : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{40}}{4} = \frac{-2-\sqrt{10}}{2}$ et $x_1 = \frac{-4+\sqrt{40}}{4} = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}$.

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right) = 0.$$

Les **solutions** de l'équation $2x^2 + 4x - 3 = 0$ sont : $S = \left\{-\frac{2+\sqrt{10}}{2};-\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right\}$

Signe d'un trinôme – résolution d'une inéquation du second degré.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 2x - 35 \leq 0$.

Soit Δ, le discriminant du polynôme $x^2 - 2x - 35$: $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-35) = 144 = 12^2$

Comme $\Delta > 0$, le **polynôme** admet deux **racines** : $x_1 = \frac{2-\sqrt{144}}{2} = -5$ et $x_1 = \frac{4+\sqrt{144}}{4} = 7$.

Comme le **coefficient** en x^2 est **positif**, le polynôme est **négatif à l'intérieur des racines** et nul aux racines.

Donc $S = [-5;7]$

DÉRIVATION

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soient *a* et *x* deux réels appartenant à I.

Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un réel, quand *x* tend vers *a*, alors ***f* est dérivable en *a*,** et le **nombre dérivé de *f* en *a*** est défini par : $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a\in I$. On suppose f dérivable en *a*.

La tangente à C_f **au point** $A(a;f(a))$ a pour équation : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
$k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	*0*
$x^n\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$	$\begin{cases} f'(x)=-1 \text{ si } x\in]-\infty;0] \\ f'(x)=1 \text{ si } x\in[0;+\infty[\end{cases}$

Soient *u* et *v* deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, soit *k* un réel :	
$(u+v)'=u'+v'$	$(ku)'=ku'$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Si $\forall x\in I, u(x)\neq 0$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$	Si $\forall x\in I, v(x)\neq 0$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Si *u* est strictement positive sur I, $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u(ax+b))'=a\times u'(ax+b)$

- Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

Si $f'(x)>0$ sur I sauf pour un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors ***f* est strict. croissante sur I.**

Si $f'(x)<0$ sur I sauf pour un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors ***f* est strict. décroissante sur I.**

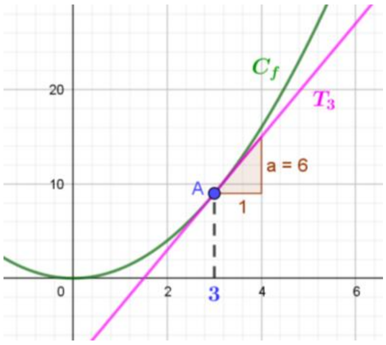
- Soit f une fonction définie et dérivable sur I. Soit x_0 appartenant à I.

Si f' s'annule en x_0 et change de signe alors f admet un **extremum local en** x_0.

DÉRIVATION (Savoir-Faire)

Calcul d'un nombre dérivé en un point – Interprétation graphique – Equation tangente

Calcul d'un nombre dérivé de la fonction carrée en 3, c'est-à-dire $f'(3)$ (avec $f(x)=x^2$), puis déterminer une équation de la tangente à C_f, au point d'abscisse 3



Taux d'accroissement de la fonction carrée entre x et 3 (ou $3+h$ et h):

$\tau(x)=\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$ ou $\tau(h)=\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$\lim\limits_{x\to 3}\tau(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$ ou $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=\lim\limits_{h\to 0}(h+6)=6$

La fonction carré est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Graphiquement, $f'(3)$ est le **coefficient directeur de la tangente** T_3 à C_f au point d'abscisse 3.

$T_3: y=f'(3)(x-3)+f(3)$ avec $f'(3)=6$ et $f(3)=9$

Donc une équation de $T_3: y=6x-9$

Calculer une fonction dérivée avec les formules.

Calculer les fonctions dérivées des fonctions $f(x)=(3x+5)e^{2x-1}$ et $g(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x-2}$

La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x+5)e^{2x-1}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle, dérivables sur $\mathbb{R}$.

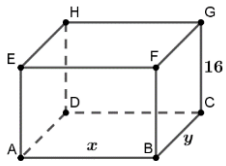
$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=3e^{2x-1}+(3x+5)\times 2e^{2x-1}$ Donc $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=(6x+13)e^{2x-1}$

La fonction g, définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x-2}$, est dérivable sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$ comme fonction rationnelle, ou quotient d'un polynôme par une fonction affine, dérivables sur chacun des intervalles (dénominateur non nul).

$\forall x\in\mathbb{R}/\{2\},\quad g'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-2)-(x^2-5x+1)}{(x-2)^2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}/\{2\},\quad g'(x)=\dfrac{x^2-4x+9}{(x-2)^2}$

Résoudre un problème d'optimisation (recherche d'extremums)

Un vase en verre a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16cm, et a une contenance de 900cm^3. Quelles dimensions doit-on donner à ce vase pour qu'il ait une surface en verre minimale ?



En modélisant le vase à l'aide d'un schéma, on note x et y, les dimensions de la base. On a alors $V=16xy$. Or, $V=900$. Donc $y=\dfrac{900}{16x}$.

Surface totale de verre : $Aire=A_{ABCD}+2\times A_{ADHE}+2\times A_{ABFE}=xy+32x+32y=\dfrac{900}{16}+32x+\dfrac{1800}{x}$

Soit $A(x)=\dfrac{900}{16}+32x+\dfrac{1800}{x}$

x	0	$7{,}5$	$+\infty$
$A'(x)$	$-$	0	$+$
A	$\searrow$	$A(7,5)$	$\nearrow$

$\forall x>0,\quad A'(x)=32-\dfrac{1800}{x^2}=\dfrac{8(4x^2-225)}{x^2}=\dfrac{8(2x+15)(2x-15)}{x^2}$

$\forall x>0,$, $2x+15>0$ **et** $x^2>0$ **. Donc le signe de** $A'(x)$ **est le signe de** $2x-15$

On en déduit les variations de la fonction A (tableau)

Le vase a une surface en verre minimale lorsque $x=7{,}5cm$. Alors $y=900/16x=7{,}5cm$. Le vase est alors un parallélépipède à base carrée de côté 7,5 cm et de hauteur 16cm.

SUITES

On appelle **suite numérique** toute application de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\quad n \mapsto u(n) = u_n$

u_n est le terme de rang *n* de la suite. On note la suite u ou $(u_n)_{n\in N}$ ou (u_n).

La suite (u_n) est **croissante** (strict. croissante) lorsque pour tout naturel *n*, $u_n \le u_{n+1}$ $(u_n < u_{n+1})$.

La suite (u_n) est **décroissante** (strict. décroissante) lorsque pour tout naturel *n*, $u_n \ge u_{n+1}$ $(u_n > u_{n+1})$.

La suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout naturel *n*, $u_n = u_{n+1}$.

<table>
<tr><th></th><th>Suite arithmétique de raison r</th><th>Suite géométrique de raison q</th></tr>
<tr><td>Définition
par récurrence</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$</td></tr>
<tr><td>Forme explicite</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 + (n-1)r$
$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r$</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$
$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}$</td></tr>
<tr><td>Sens de variation</td><td>Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante
Si $r = 0$, (u_n) est constante
Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>$u_0 > 0$</th><th>$u_0 < 0$</th></tr>
<tr><td>$q < 0$</td><td colspan="2">(u_n) non monotone</td></tr>
<tr><td>$0 < q < 1$</td><td>(u_n) strict. décroissante</td><td>(u_n) strict. croissante</td></tr>
<tr><td>$q > 1$</td><td>(u_n) strict. croissante</td><td>(u_n) strict. décroissante</td></tr>
<tr><td>$q = 0$ ou $q = 1$</td><td colspan="2">(u_n) constante</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$</td><td>$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$</td></tr>
<tr><td>Somme de termes consécutifs</td><td>$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$
$\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$
$\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$
$\begin{pmatrix}\text{Somme de}\\ \text{termes}\\ \text{consécutifs}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Nombre}\\ \text{de termes}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Moyenne}\\ \text{des termes}\\ \text{extremes}\end{pmatrix}$
Cas particulier : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$</td><td>Pour $q \ne 1$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
$\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$
$\begin{pmatrix}\text{Somme}\\ \text{de termes}\\ \text{consécutifs}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Premier}\\ \text{terme}\end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}\right)$</td></tr>
<tr><td>Limites
(Terminale)</td><td>Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$</td><td>Si $q \le -1$, (u_n) n'a pas de limite
$-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = (\mathit{signe\ de}\ u_0) \times \infty$</td></tr>
</table>

- La suite (u_n) admet le réel l comme limite ou (u_n) **converge vers** l**,** si et seulement si, tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$, avec ε réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

  On note : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l}$
- Les suites de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^p}$ $p\in\mathbb{N}^*$ convergent vers 0.

Une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle diverge vers $-\infty$, soit elle n'a pas de limite.

- On dit qu'une suite (u_n) admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) comme limite si et seulement si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

  On note : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$
- Les suites $(\sqrt{n})$, (n), (n^2) et (n^p) avec $p\in\mathbb{N}^*$ admettent pour limite $+\infty$.

Suites (Savoir-Faire)

Nature d'une suite.

- Pour justifier qu'une suite n'est ni arithmétique, ni géométrique, on calcule ses premiers termes et on vérifie que $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ ou que $u_1/u_0\neq u_2/u_1$
- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montre que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n$ est **constant** (raison)
- Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montre que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=qu_n$ où q est un nombre **constant**.

Calculer une somme avec une suite

Calculer $S=112+115+118+....+214$.

On reconnait une somme de termes d'une suite **arithmétique** de raison 3 et de 1er terme $u_0=112$.

Donc, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0+nr=112+3n$

On cherche l'indice n tel que $u_n=214$ $\Leftrightarrow 112+3n=214$ $\Leftrightarrow n=34$ donc $u_{34}=214$

Donc $S=112+115+118+....+214=\underbrace{u_0+u_1+u_2+...+u_{34}}_{35\ termes}=35\times\dfrac{u_0+u_{34}}{2}=35\times\dfrac{112+214}{2}$ Donc $S=5705$

Déterminer le sens de variation d'une suite

Sens de variation de la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=n^2-3n+1$

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-3(n+1)+1-n^2+3n-1=2n-2$

$\forall n\geq 2,\ \ 2n-2>0$. Donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2

Soit f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-3x+1$. On a bien $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=f(n)$.

f est décroissante sur $[0;3/2]$ puis croissante sur $[3/2;+\infty[$. Donc (u_n) est croissante à partir du rang 2

EXPONENTIELLE

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, notée « exp ».

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{array}$$

On note $e = \exp(1)$ $\qquad e \approx 2,72$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$

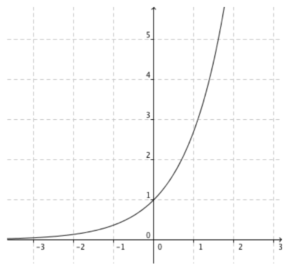
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},$

$e^0 = 1 \qquad e^x > 0 \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \qquad \left(e^x\right)^n = e^{nx}$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Pour tout réel** $x \leq 0$**,** $0 < e^x \leq 1$**.**
- **Pour tout réel** $x \geq 1$**,** $e^x \geq 1$**.**
- **Pour tous réels *x* et *y* :** $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ **et** $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$**.**

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp x)'$		$+$		
$\exp x$	0 ↗	1	e	$+\infty$



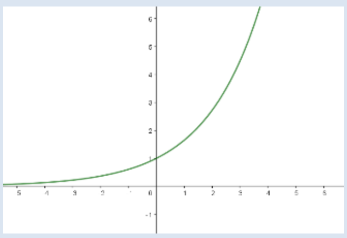
La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et, pour tout réel *x* :** $f'(x) = a \times e^{ax+b}$

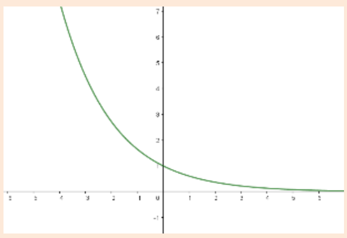
Soit k un réel **strictement positif** :

$f(x) = e^{kx}$	$f(x) = e^{-kx}$
$f'(x) = ke^{kx}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$	$f'(x) = -ke^{-kx}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	↘	

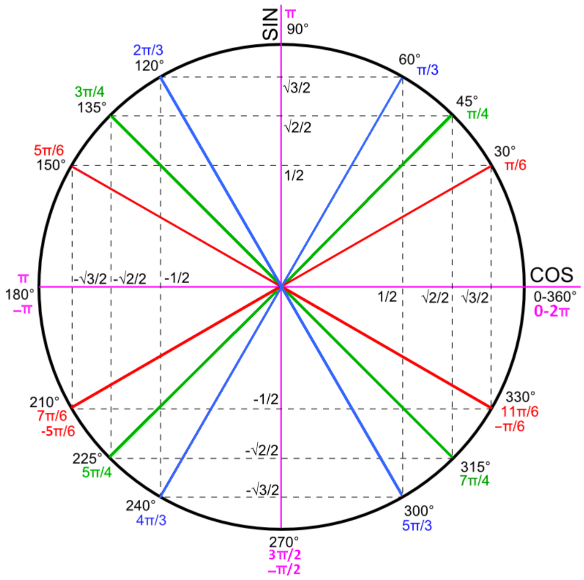




TRIGONOMÉTRIE

- On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 sur lequel on a défini un sens de parcours positif appelé **sens direct** (ou sens trigonométrique), sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels x de la forme $x+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Un **angle de 1 radian** est un angle interceptant sur le cercle trigonométrique un arc de longueur 1.
- Parmi toutes les mesures d'un angle, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$. On l'appelle **mesure principale de l'angle**.

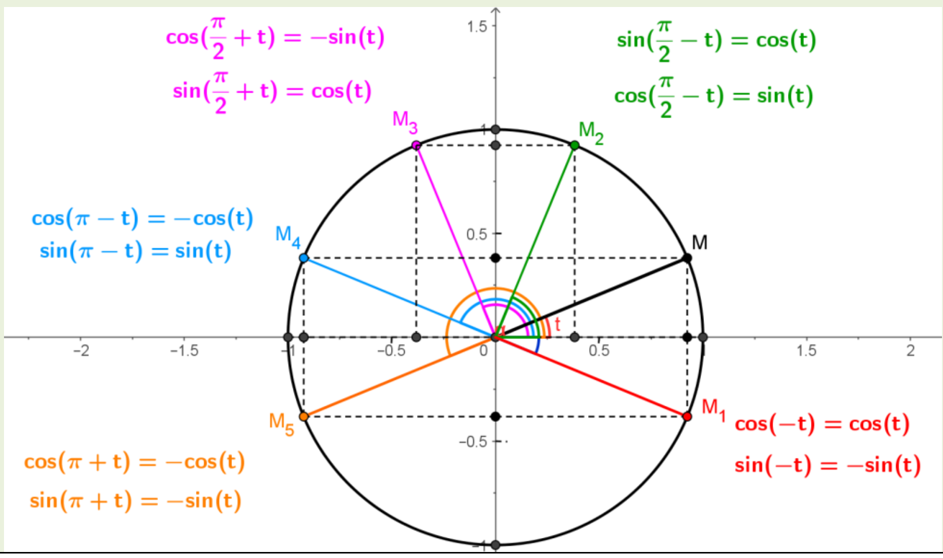
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$



Relations fondamentales, symétries et angles associés :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \begin{cases} |\cos x| \le 1 \\ |\sin x| \le 1 \end{cases}$ $\qquad$ **si** $\cos x \ne 0, \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$



Soient x et α deux réels.

- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi \ \ ou\ x = -\alpha + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi \ \ ou\ \ x = \pi - \alpha + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ On travaille **modulo** 2π

- La fonction f définie sur D_f est **paire** si et seulement si $\boxed{\forall x \in D_f,\ (-x) \in D_f\ \ et\ \ f(-x) = f(x)}$.

  La courbe représentative d'une fonction paire admet **l'axe des ordonnées comme axe de symétrie**.
- La fonction f définie sur D_f est **impaire** si et seulement si $\boxed{\forall x \in D_f,\ (-x) \in D_f\ \ et\ \ f(-x) = -f(x)}$.

  La courbe représentative d'une fonction impaire admet **l'origine comme centre de symétrie**.

- Soit T un réel. La fonction f définie sur D_f est **périodique de période T** si et seulement si

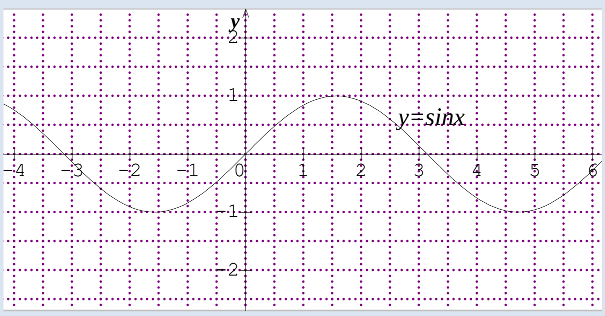
$\forall x \in D_f,\ (x+T) \in D_f\ \ \ et\ \ \ f(x+T) = f(x)$.

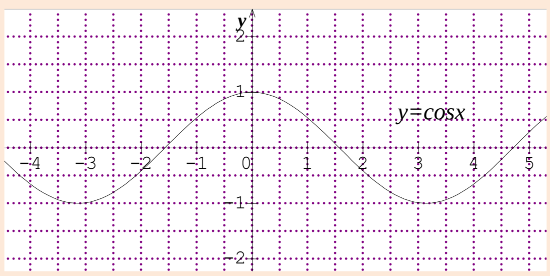
La courbe représentative d'une fonction T-périodique est inchangée par translation de vecteur $T\vec{i}$

Fonction sinus	**Fonction cosinus**
$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$ $x \mapsto \sin x$	$\cos : \mathbb{R} \to [-1;1]$ $x \mapsto \cos x$
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de **période** 2π	
La fonction sinus est **impaire**	La fonction cosinus est **paire**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		+	0	−	
sin	0	↗	1	↘	0

x	0		π
$\cos'(x)$		−	
cos	1	↘	−1





PRODUIT SCALAIRE

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$ **et** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

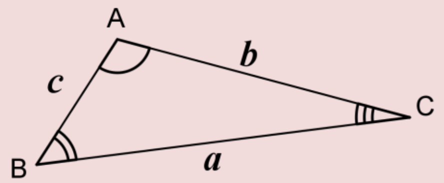
- Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ deux vecteurs non nuls. Soient *E'* et *F'* les projetés orthogonaux de *E* et *F* sur (AB).

Alors $\overrightarrow{E'F'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{EF}$ sur (AB) et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{E'F'}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, soit *k* un réel :	
$\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$	$(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
$\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\geq\|\vec{u}+\vec{v}\|$	

- **Orthogonalité :** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

Soit ABC un triangle où l'on note : $\begin{cases}AB=c\\AC=b\\BC=a\end{cases}$



- ***Théorème d'Al-Kashi :***

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

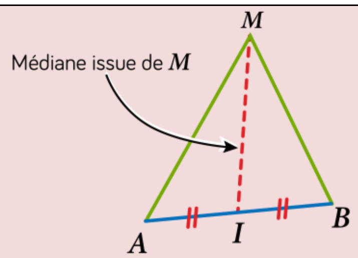
- ***Formule des sinus*** :

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

- ***Théorème de la médiane***

Soient A et B deux points distincts. Soit I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

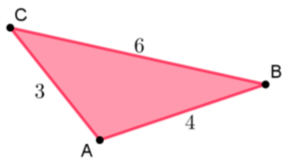


PRODUIT SCALAIRE (Savoir-Faire)

Calcul d'un produit scalaire avec les coordonnées – vecteurs orthogonaux

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4;\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}(1;-6)$ sont-ils orthogonaux ? $\vec{u}.\vec{v}=4\times1+\dfrac{2}{3}\times(-6)=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

Calcul d'un produit scalaire avec les normes



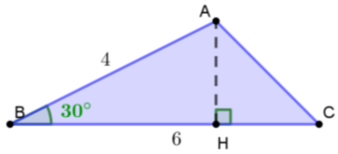
Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

On rappelle que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

En posant $\vec{u}=\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, on a $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ (Chasles), alors $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(CB^2-CA^2-AB^2\right)$

Donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{11}{2}$ On en déduit que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{11}{2}$

Calcul d'un produit scalaire avec le projeté orthogonal – avec un angle



Calculer la longueur *BH*. En déduire la hauteur *AH* puis l'aire du triangle *ABC*.

D'une part, H est le projeté orthogonal du point *A* sur la droite *(BC)*. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est le projeté orthogonale du vecteur $\overrightarrow{BA}$ sur la droite *(BC)*.

Donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH=6\times BH$ (vecteurs colinéaires même sens)

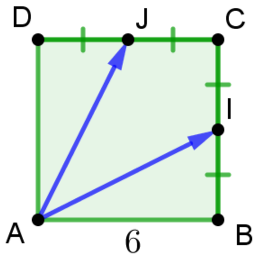
D'autre part, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\|\overrightarrow{BC}\|\times\|\overrightarrow{BA}\|\times\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=6\times4\times\cos(30°)=12\sqrt{3}$

On en déduit que $6\times BH=12\sqrt{3}$ donc $BH=2\sqrt{3}$

En utilisant Pythagore ou la trigonométrie dans le triangle *ABH*, on obtient $AH=2$.

On en déduit alors que $Aire_{ABC}=\dfrac{base\times hauteur}{2}=6$.

Calcul d'un produit scalaire à l'aide d'une configuration géométrique (décomposition – orthogonalité)



ABCD est un carré de côté 6. *I* est le milieu de [*BC*] et *J* est le milieu de [*CD*].

Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, arrondi au degré.

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right)=\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{vecteurs\perp}+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}}_{colinéaires\ même\ sens}+\underbrace{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}}_{colinéaires\ même\ sens}+\underbrace{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}}_{vecteurs\perp}$$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=AB\times DJ+BI\times AD$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=36$

En utilisant Pythagore, on obtient $AI=AJ=3\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos\left(\widehat{IAJ}\right)=45\cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

Donc $\cos\left(\widehat{IAJ}\right)=0,8$ Calculatrice : $\widehat{IAJ}\approx37°$

PROBABILITÉS

Soient A et B deux événements de E.

- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Si $A\cap B=\varnothing$, alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- Si $A\subset B$, alors $p(A)\leq p(B)$
- $p(\overline{A})=1-p(A)$

Des évènements non impossibles A, B, C … forment **une partition d'un univers** Ω lorsqu'ils sont incompatibles deux à deux ($A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, ...), et que leur réunion est l'univers Ω $(A\cup B\cup C\cup ...=\Omega)$.

Formule des probabilités totales :

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements formant une partition d'un univers Ω. Soit B un évènement.

$p(B)=p(A_1\cap +B)+p(A_2\cap +B)+...+p(A_n\cap +B)$; en particulier : $p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)$

Soient A et B deux événements avec $\mathrm{p}(A)\neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de *B* sachant *A***, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Elle est notée $p_A(B)$ et est définie par : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ ou $p(A\cap B)=p_A(B)\times p(A)$

Deux évènements A et B non impossibles sont **indépendants** lorsque : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Une **variable aléatoire** sur l'univers $\Omega=\{e_1;e_2;...;e_p\}$ est une fonction X définie sur Ω.

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1;....;x_n$. La **loi de probabilité** de X est définie par :

x_i	x_1	…	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	…	$p(X=x_n)$

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs réelles $x_1, x_2, ..., x_n$ de probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$.

- **L'espérance de *X*** est le nombre noté $E(X)$ défini par :

  $E(X)=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$; l'espérance a la même unité que les x_i.

- **La variance de *X*** est le nombre noté $V(X)$ défini par :

  $$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+...+p_n(x_n-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2$$

- **L'écart-type de *X*** est le nombre $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$; il a la même unité que les x_i.

Formule de Koenig-Huygens : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-(E(X))^2$

La variance est donc aussi : « la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne ».

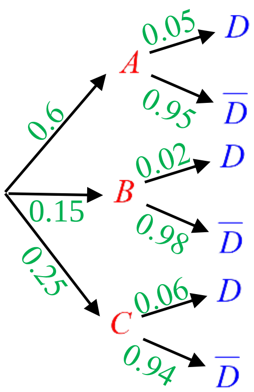
PROBABILITÉS

Probabilités conditionnelles.

Une entreprise fabrique des trottinettes électriques sur trois sites : Le site A assure 60% de la production totale, le site B produit 15% des trottinettes et le site C produit le reste.

Une étude a montré que, parmi les trottinettes provenant du site A, 5% sont défectueuses, contre 2% pour celle du site B et 6% pour celles du site C.

On note respectivement A, B, C et D les évènements « la trottinette provient du site A », « la trottinette provient du site B », « la trottinette provient du site C » et « la trottinette est défectueuse ».



1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2) Calculer la probabilité qu'une trottinette provienne du site A et soit défectueuse.

$$p(A\cap D)=p(A)\times p_A(D)=0,6\times 0,05=0,03$$

3) Calculer la probabilité qu'une trottinette défectueuse.

Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

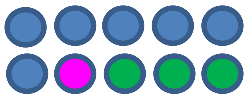
$$p(D)=p(A\cap D)+p(B\cap D)+p(C\cap D)=p(A)\times p_A(D)+p(B)\times p_B(D)+p(C)\times p_C(D)=0,048$$

4) On choisit une trottinette en bon état : quelle est la probabilité qu'elle provienne du site C ?

$$p_{\overline{D}}(C)=\frac{p(C\cap\overline{D})}{p(\overline{D})}=\frac{p(C)\times p_C(\overline{D})}{1-p(D)}=\frac{0,25\times 0,94}{1-0,048}=0,2468$$

Variables aléatoires, espérance et écart-type.

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : un boule rose, trois boules vertes et six boules bleues. Un jeu consiste à tirer une boule dans l'urne, avec une mise de 2€. Une boule rose rapporte 10€, une boule verte rapporte 3€, une boule bleue ne fait rien gagner. On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.



1) Déterminer la loi de probabilité de X

$X(\Omega)=\{-2;1;8\}$ (gain – mise)

x_i	-2	1	8
$p(X=x_i)$	0,6	0,3	0,1

2) Calculer l'espérance *E(X)*. Interpréter le résultat.

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=(-2)\times 0,6+1\times 0,3+8\times 0,1=-0,1$$

L'espérance est négative donc le jeu est défavorable au joueur : il va perdre 0,10€ par partie sur un grand nombre de parties.

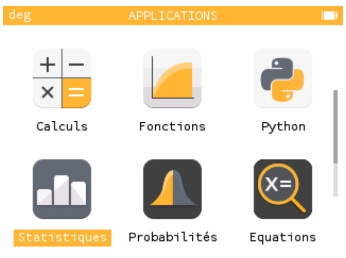
3) Calculer la variance *V(X)* et l'écart-type *σ(X)*. Interpréter.

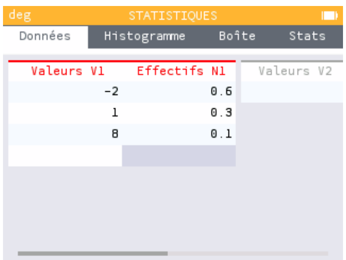
$$V(X)=\sum_i\left(x_i-E(X)\right)^2 p_i=\left((-2)+0,1\right)^2\times 0,6+(1+0,1)^2\times 0,3+(8+0,1)^2\times 0,1=9,09$$

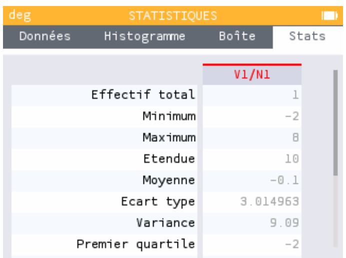
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 3.$ L'écart-type est « relativement » élevé. Donc le risque est important.

Autre formule pour calculer la variance (Koenig-Huygens) :

$$V(X)=\sum_i x_i^2 p_i-\left(E(X)\right)^2=(-2)^2\times 0,6+(1)^2\times 0,3+(8)^2\times 0,1-(-0,1)^2=9,09$$







GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Le vecteur $\vec{n}$, non nul, est **normal à la droite D** si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de D.

Le plan est muni d'un repère	**Équation cartésienne en général**	**Équation réduite Droite non parallèle à (O*y*)**
Une **équation** d'une droite	$ax + by + c = 0$	$y = mx + p$
Un vecteur **directeur** de la droite	$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
Un vecteur **normal** (repère orthonormé)	$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$
Soit D d'équation Soit D' d'équation D // D' D $\perp$ D'	$ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$ $ab' - a'b = 0$ $aa' + bb' = 0$	$y = mx + p$ $y = m'x + p'$ $m = m'$ $mm' = -1$

- Soit *C* le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ de rayon R dans un repère orthonormé.

$M(x; y) \in C \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est une **équation cartésienne du cercle *C*.**

- Soit *C* le cercle de diamètre $[AB]$: $M(x; y) \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

- Soit *a*, *b* et *c* trois réels, avec *a* non nul.

$y = ax^2 + bx + c$ est **l'équation cartésienne d'une parabole** de sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$, admettant un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

« La rigueur vient toujours à bout de l'obstacle » Léonard de Vinci

Bonnes vacances !

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE (Savoir-Faire)

Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.

Déterminer une équation de la droite (d) passant par $A(-5;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2;3)$.

$M(x;y) \in (d)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x+5;y-1)$ et $\vec{n}(-2;3)$ sont orthogonaux.

$\Leftrightarrow (-2)\times(x-5)+3(y-1)=0$

$\Leftrightarrow -2x+3y+7=0$

Une équation cartésienne de $(d): -2x+3y+7=0$

$(d): ax+by+c=0$

Le vecteur $\vec{n}(-2;3)$ est un vecteur normal de (d).

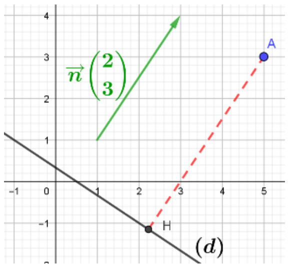
Donc $(d): -2x+3y+c=0$

$A(-5;1) \in (d) \Leftrightarrow (-2)\times 5+3\times 1+c=0 \Leftrightarrow c=7$

Donc $(d): -2x+3y+7=0$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Soit (d), la droite d'équation $2x+3y-1=0$, et un point $A(5;3)$.Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur (d).



On note $H(x_H;y_H)$, projeté orthogonal de A sur (d)

$\vec{n}(2;3)$ est un vecteur normal de (d) : il est donc colinéaire à $\overrightarrow{AH}(x_H-5;y_H-3)$.

$\det(\vec{n},\overrightarrow{AH})=0 \quad \Leftrightarrow 2(y_H-3)-3(x_H-5)=0 \quad \Leftrightarrow 3x_H-2y_H=9$

De plus, $H(x_H;y_H)\in(d) \quad \Leftrightarrow 2x_H+3y_H=1$

Nous devons résoudre le système : $\begin{cases} 3x_H-2y_H=9 \\ 2x_H+3y_H=1 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times(-3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -13y_H=15 \\ 13x_H=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=\dfrac{29}{13} \\ y_H=\dfrac{-15}{13} \end{cases}$

Donc $H\left(\dfrac{29}{13};\dfrac{-15}{13}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur (d).

Remarque : la distance AH est la distance du point A à la droite (d) : elle est notée $d(A;(d))$.

Reconnaître une équation de cercle.

Pour chacune des équations suivantes, indiquer s'il s'agit d'une équation de cercle et, si c'est le cas, préciser son centre et son rayon.

a. $x^2+y^2-2x+3y+\dfrac{5}{4}=0$ *b.* $x^2+y^2-4x+5=0$

Rappel : une équation de cercle peut se mettre sous la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

a. $x^2+y^2-2x+3y+\dfrac{5}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+\dfrac{5}{4}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\dfrac{5}{4}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=2$. On obtient une équation d'un cercle de centre $\Omega\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b. $x^2+y^2-4x+5=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2+5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-4+y^2+5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=-1$

Pour tous réels x et y, $(x-2)^2+y^2>0$. Il n'existe donc aucun point du plan dont les coordonnées vérifient cette équation. Ce n'est donc pas une équation de cercle.

Déterminer une équation de cercle connaissant son diamètre.

Déterminer une « équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(5;3)$ et $B(-1;-4)$

$M(x,y)\in C_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \quad \Leftrightarrow (x-5)(x+1)+(y-3)(y+4)=0$

Une équation de $C_{[AB]}: x^2+y^2-4x-y-17=0$